数理解析研究所講究録
462巻 1982年 72-80

パンルベ IV 型方程式の誤差関数解について

愛媛大 工　亀高 惟倫
〃 〃　野田 松太郎

戸田方程式

$$(\mathrm{TD})\qquad s_n' = r_{n-1} - r_n, \quad r_n' = r_n(s_n - s_{n+1})$$

$$\left(s_n = s_n(t),\quad r_n = r_n(t),\quad ' = \frac{d}{dt}\right)$$

をパンルベ IV 型方程式

$$(\mathrm{P IV}(\alpha,\beta))\qquad q'' = \frac{(q')^2}{2q} + \frac{3}{2}q^3 + 4tq^2 + 2(t^2-\alpha)q + \frac{\beta}{q}$$

$$\left(q = q(t),\quad ' = \frac{d}{dt},\quad '' = \left(\frac{d}{dt}\right)^2\right)$$

の解で解くことができる。

$$(1)\qquad q_1 = -2t - \frac{e^{-t^2}}{\mathrm{Erf}\,t - 1/q_1(0)}, \quad p_1 = \frac{2}{q_1} - q_1 - 2t$$

$$(2)\qquad \begin{cases} q_{n+1} = \dfrac{2n}{p_n} - (p_n + q_n + 2t) \\ p_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{q_{n+1}} - (p_n + q_{n+1} + 2t) \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(3) $$q_0 = \frac{e^{-t^2}}{\mathrm{Erf}\,t + 1/q_0(0)}$$

(4) $$\begin{cases} q_{-(n+1)} = \dfrac{2(n+1)}{q_n + 2t} \\[2ex] p_{-n} = -\dfrac{2n}{q_{-n}} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

$$\left(\mathrm{Erf}\,t = \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau \quad 誤差関数 \right)$$

により q_n, p_n を定義すると q_n は PIV $(1-n, -2n^2)$ をみたす。又

(5) $$q_n' = q_n(p_{n-1} - p_n), \quad p_n' = p_n(q_n - q_{n+1})$$

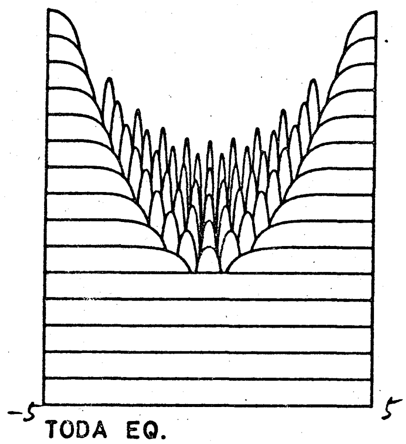
もみたす。したがって

(6) $$s_n = p_{n-1} + q_n, \qquad r_n = p_n q_n$$

(又は $s_n = p_n + q_n$, $r_n = p_n q_{n+1}$)

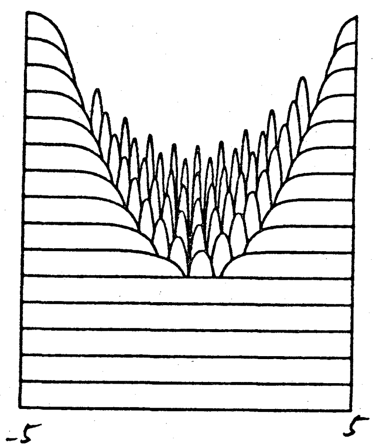
とおくと s_n, r_n は戸田方程式 TD をみたす。特に $r_n = 2n$, $s_n = -2t$ $(n \leq 0)$ である。$r_n = 2n$, $s_n = -2t$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) は戸田方程式の自明な解であることに注意。まず $1/q_0(0) + 1/q_1(0) = 0$ としていく

つかの $g_0(0)$ の値について r_n のグラフをかき 簡単な立体図にした。

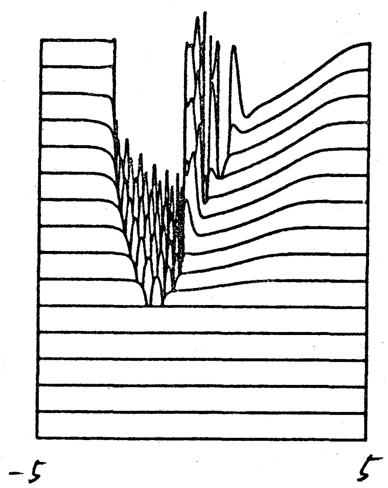


TODA EQ.
P-IV ERROR FUNCTION
SOLTION

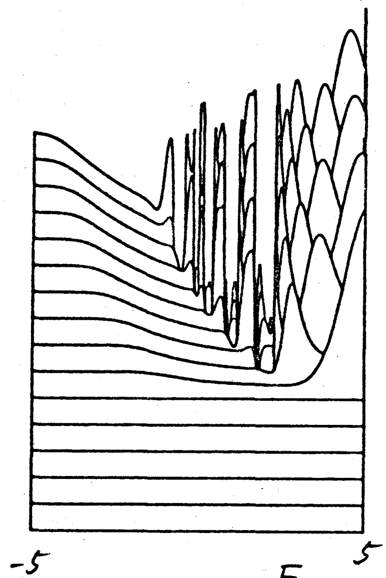
$1/g_0(0) = 0$



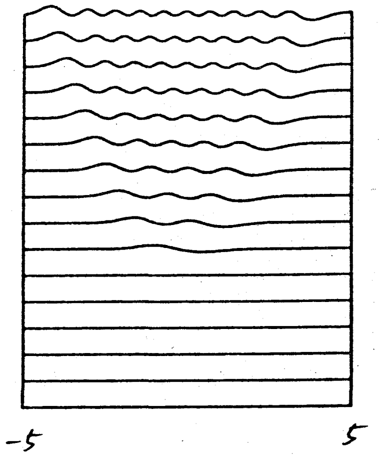
$1/g_0(0) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}$



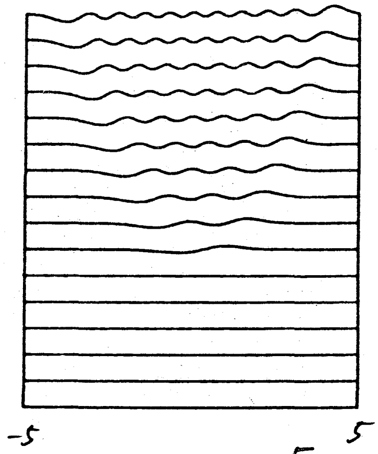
$1/g_0(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$



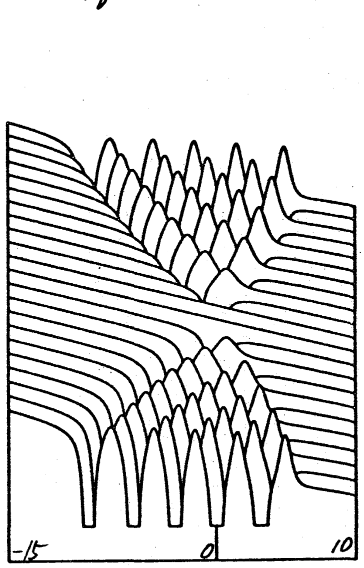
$1/g_0(0) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$



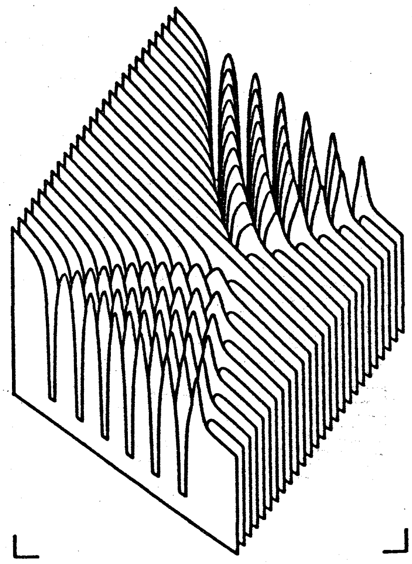
$1/g_0(0) = \sqrt{\pi}$



$1/g_0(0) = -\sqrt{\pi}$



TODA EQ.
P-II RATIONAL SOLUTION

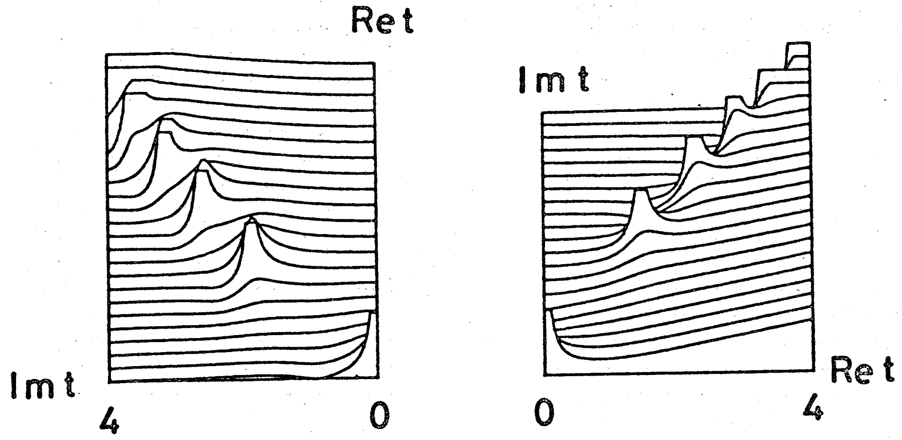


TODA EQ.
PII RATIONAL SOLUTION

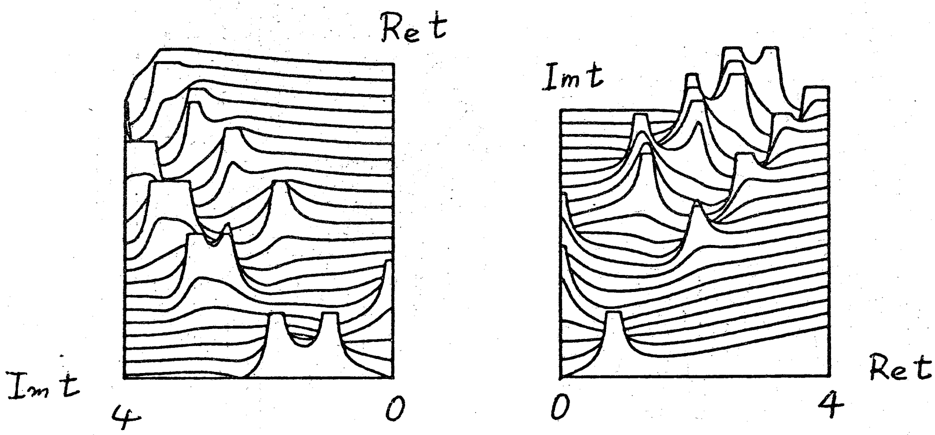
比較のため 戸田方程式とパンルヴェII型方程式が共有する有理関数解の立体図を上にかかげた。

次は $g_n(t)$ の絶対値 $|g_n|$ を複素 t-平面上に立体図で表わしたもの $|g_n(-t)| = |g_n(\bar{t})| = |g_n(t)|$ であるので $\mathrm{Re}\, t \geq 0$, $\mathrm{Im}\, t \geq 0$ の部分でのみみればよい。

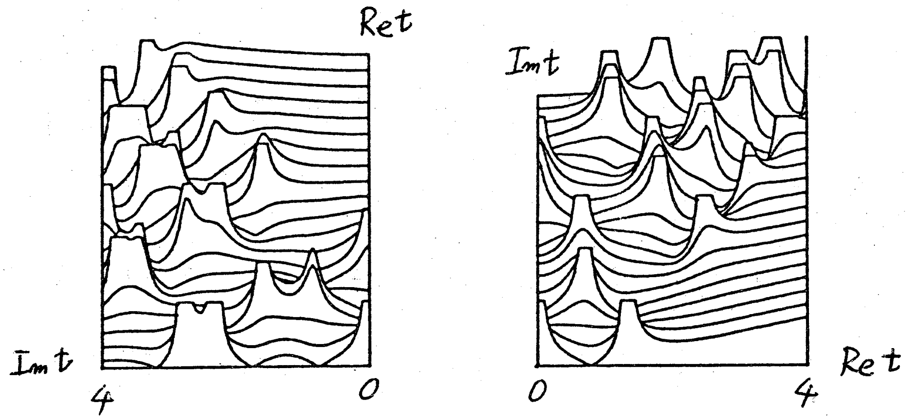
$|q_1|$ P-IV (0, 2)



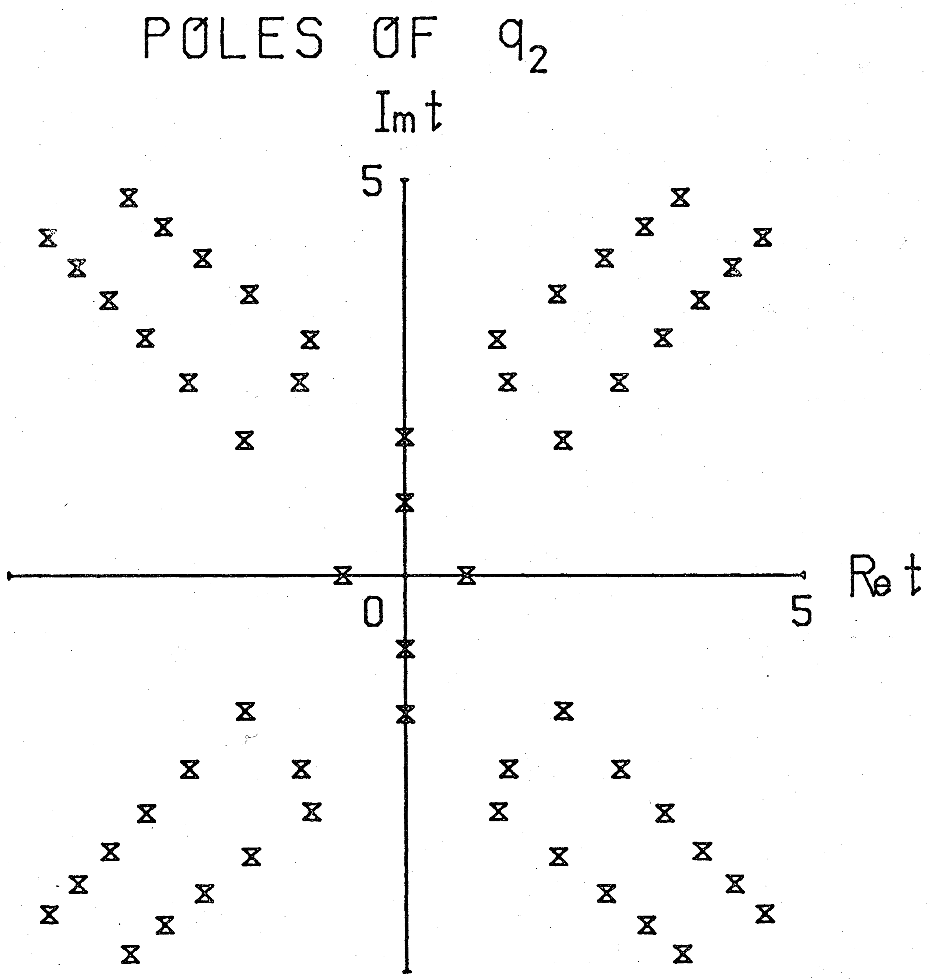
$|q_2|$ P-IV (-1, -8)



$|q_3|$ P-IV (-2, -18)



いずれも $|t|$ が大きい所は不正確であるおそれがある。マイコン シャープ PC-3100 にプロッターをつないでかいたもので相当長時間を要する。ともかく q_n の極の位置がおおよそみてとれる。我々の主要な目標は次図のように極を正確に計算し図示することである。これも相当長時間を要するため残念ながら今の所 q_2 についてしか完成していない。



g_n の極は $1/g_n$ の零点として ニュートン法で求めればよいが (5) が成り立っているので t_0 を適当な出発点として

$$t_{k+1} = t_k + \frac{g_n(t_k)}{g_n'(t_k)}$$

$$= t_k + \frac{1}{p_{n-1}(t_k) - p_n(t_k)} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

なる反復を行えばよい。t_0 の候補は t-平面を適当な格子に割って $|g_n|$ が十分大きくなる t をみつければよい。以上全て g_n, p_n の値をいかに正確に計算するかにかかっている。漸化式の部分 (2) は簡単であるが g_n の計算には $\mathrm{Erf}(t)$ 正確には $e^{t^2}\mathrm{Erf}(t)$ の計算が必要でこの部分がマイコンにとっては殊にむつかしい。我々は

$$\mathrm{Erf}\, t = \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}\, t$$

を アブラモビッツ のハンドブックに従って

$$\mathrm{erf}\, x \fallingdotseq 1 - 1/A^{16}$$

$$A = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_6 x^6$$

$a_1 = .07052\ 30784 \qquad a_2 = .04228\ 20123$

$a_3 = .00927\ 05272 \qquad a_4 = .00015\ 20143$

$a_5 = .00027\ 65672 \qquad a_6 = .00004\ 30638$

$$\mathrm{erf}(x+iy) \fallingdotseq \mathrm{erf}\,x + \frac{e^{-x^2}}{2\pi x}\left[(1-\cos 2xy) + i \sin 2xy\right]$$

$$+ \frac{2}{\pi} e^{-x^2} \sum_{n=1}^{20} \frac{e^{-\frac{n^2}{4}}}{n^2 + 4x^2}\left[f_n(x,y) + i g_n(x,y)\right]$$

$$f_n(x,y) = 2x - 2x \cosh ny \cos 2xy + n \sinh ny \sin 2xy$$

$$g_n(x,y) = 2x \cosh ny \sin 2xy + n \sinh ny \cos 2xy$$

Σ の部分の項数を 20 としたのは精密な吟味によった訳ではない。項数を 10 として前出の $|g_n|$ の立体図をかいてみると $|t|$ 大の所であまりかな誤差のでるようすが出る。又項数 20 にしておくと $\mathrm{erf}\,t=0$ をニュートン法で求めた結果とアブラモビッツの資料は一致する。このことは $\mathrm{Erf}\,t$ の計算は上の方法で非常に正確であることを意味するが我々に必要なのは $e^{t^2}\mathrm{Erf}\,t$ である。

$t=5$ のとき $e^{t^2} \fallingdotseq 7\times10^{10}$ であることに注意すれば $\mathrm{Erf}\,t$ を極めて正確に計算したとしても $e^{t^2}\mathrm{Erf}\,t$ は相当不正確ということになる。

結論としては $e^{t^2}\mathrm{Erf}\,t$ のよい近似式を利用すべきであることと 大型計算機を使用して全体に高速化しなければならないことであるが それにはもう少し時間をいただきたい。